折り紙の幾何学 (2)

品川公成

― 最大の等辺八角形を折る ―

本稿は、折り紙の幾何学(1)の続きです。今回は、前回と同じ折り方で折れる等辺八角形に着目して、その大きさと正八角形からのゆがみを調べます。

折り紙で正八角形を折る場合、図１に示すような４つの隅を折って作られる正八角形 ABCDEFGH が思い浮かびます。折り紙の一辺の長さを１とすると、この正八角形の一辺の長さ L_0 と面積 S_0 は $L_0 = (2)^{1/2} - 1 \sim 0.414$、$S_0 = 4\{(2)^{1/2} - 1\} = 1.66$ になります。この正八角形は、折り紙で折れる最大の正八角形です。前回の折り方では、図２に示すように、正八角形をゆがめた等辺八角形が折れます。

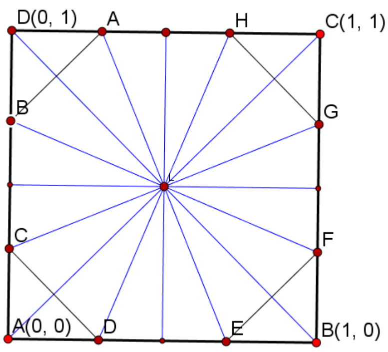

図1 最大の正八角形

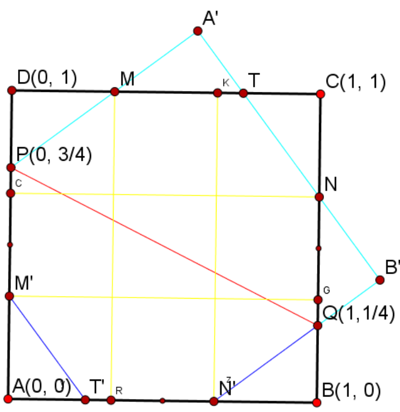

図2 3✕3 マス目折りと等辺八角形

　ここで、前回の折り方を復習しておきます。折り紙を図２の赤字で示した折り線 PQ{3/4, 1/4}で折ると、黄色の線で示した 3✕3 のマス目に折ることができます。この図で、折った状態をもとに戻す、すなわち、折り線で折り戻すことを考えます。辺 AB 上の M, T と辺 BC 上の N を折り戻した点を M', T'および N'とすると、等辺八角形 TMPM'T'N'QN が得られます。この等辺八角形の一辺の長さ L と面積 S は、$L = 5/12 \sim 0.417$、$S = 5/3 \sim 1.67$ で与えられます。したがって、この等辺八角形は、正八角形よりも大きな八角形であり、折り紙で折れる同じ等辺八角形の中で最大のものです。つぎに、この等辺八角形が正八角形からどれだけズレているのかを調べます。そこで、ゆがみ δ (%)を、等辺八角形の一辺の長さ L と正八角形の一辺の長さ $L_0 = (2)^{1/2} - 1$ から、以下のように定義します。

$$\delta = \{(L - L_0)/L_0\} \times 100 \qquad (1)$$

式(1)の定義から正八角形では $\delta = 0$、図２の等辺八角形では、$\delta = 0.592$ (%)になります。

　一般に、折り線{p, q}を $p = (2n + 1)/(4n)$, $q = (2n - 1)/(4n)$, $n = 1, 2, 3\ldots$とすると、$(2n + 1)\times(2n + 1)$のマス目に折ることができます。図２の場合と同様に、折った状態を折り戻すと等辺八角形が得られます。このときの等辺八角形の一辺の長さ L と面積 S は、前回の結果から、

$$L = TM = (4n^2 + 1)/\{4n(2n + 1)\}, \qquad (2)$$

$$S = L/2\times 8 = 4L = (4n^2 + 1)/\{n(2n + 1)\} \qquad (3)$$

で与えられます。

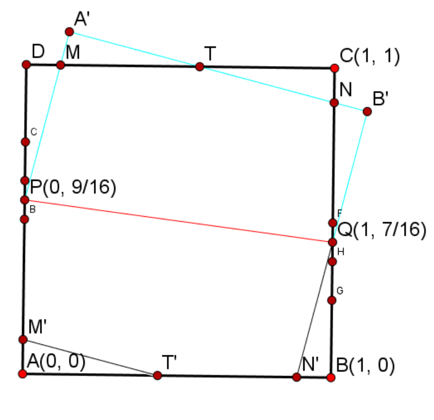

図3　n ＝ 4 の等辺八角形

図３に、n = 4 とした場合の等辺八角形 TMPM’T’N’QN を示しました。この時の一辺の長さ L と面積 S は、式(2)と式(3)から、L = 65/144 ~ 0.451、S = 65/36 ~ 1.80 となります。したがって、この等辺八角形の大きさは、図１の正八角形や図２の等辺八角形よりもさらに大きく、折り紙で折れる同じ等辺八角形の中で最大のものになっています。この等辺八角形の正八角形からゆがみ δ は、式(1)から、δ = 8.98 (%)になります。

n をさらに大きくすると、等辺八角形は、図３から明らかなように、正方形に近づきます。すなわち、この折り方で得られる最大の等辺八角形は、図４に示すような一辺の長さ L と面積 S が L = 1/2 = 0.5、S = 1 となる“等辺八角形”(正方形)になります。この等辺八角形は、この折り方で折れる最大の等辺八角形になります。この時のゆがみ δ は、 δ = 20.7 (%)となります。

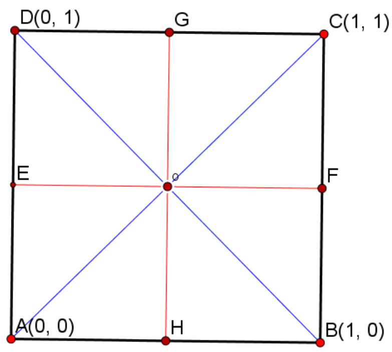

図4 最大の“等辺八角形”

本稿では、(2n + 1)✕(2n + 1)のマス目を折る折り方で作られる等辺八角形の一辺の長さ、面積、正八角形からのゆがみを調べました。この折り方で得られる等辺八角形は、折り紙で折れる最大の正八角形と折り紙そのものである正方形を補間する図形であることが分りました。