三角形の中心点とオイラー座標　　　品川公成

はじめに

前解説「三角形の中心点とオイラー線」(以降、前解説と記す) の第 6 章オイラー座標の中で“オイラー線を x 軸….orthic axis を y 軸とする直交座標 (x, y) をオイラー座標(Euler coordinates) と命名したが、まだ一般的に認知されていない” と紹介しました。今回、オイラー座標について、論文 K. Shinagawa, C. Kimberling, and Peter J.. Moses：Euler Coordinates in the Plane of a Triangle [1) にまとめましたので、その後の進展を含めてオイラー座標について解説します。 この論文の共著者である Prof. Kimberling は Encyclopedia of Triangle Centers (ETC) [2) の主宰者で、この方面では著名な方です。また、Dr. Moses は彼の共同研究者で ETC に載せる中心点に関する情報を提供している方です。

著者は、数学の論文を書いたこともないし、書いても投稿する雑誌も知らないという全くの数学の素人なので、この論文をまとめるにあたってオイラー座標に関してまとめた論文の原稿を Prof. Kimberling に送り、共著者になって雑誌の選定なども含めて協力して欲しい旨メールでお願いしました。 彼からの返信メールには“I'm honored that you have invited me to co-author,……..There are numerous places where I can make the English smoother.” という返事をもらいました。この返信の内容から、英語を修正する程度で論文がまとまるのではと考えていましたが、その後、彼から Dr. Moses を共著者に加えて欲しいという要望がありました。Dr. Moses の参加によって、小生の当初の原稿に先の ETC に載せる情報が大幅に付け加えられました。その結果、この論文の内容に関連して、ETC には、現在、数百個の新しい中心点が追加され、その中の約 40 個の中心点には ”Shinagawa - Euler point” という名前が付けられています。そのような経緯で、先の論文は、小生の初めの原稿から大幅に ETC 寄りの論文になっています。論文が完成した後、Prof. Kimberling から, ”It took me a while to understand what your **infinite points** are. … For this contribution to triangle geometry, I thank you most sincerely” というメッセージをもらいました。

この解説では、先の英文論文の単なる紹介ではなく、著者の最初の原稿に近い形で、三角形の中心点を表すのに使われてきた面積座標から新しい直交座標系でのオイラー座標へ変換、それによって、従来の面積座標では扱えなかった **infinite points** が通常の中心点と同様に扱えること、さらに、多数の新しい中心点が見出されたことなどオイラー座標を中心に紹介します。

１．　オイラー座標

1.1 中心点の面積座標とオイラー座標

三角形の中心点を扱うには、前解説でも紹介した面積座標が広く使われています。この座標では、中心点 P の位置(x, y, z) を三角形 ABC の面積 S_{area} と三角形の頂点 A, B, C と中心点 P を結んで作られる 3 つ三角形, ΔPBC, ΔPCA, ΔPAB の面積 S_1, S_2, S_3を用いて、以下のように定義されます。

$$P = (x, y, z) = (S_1, S_2, S_3)/S_{area}, \quad x + y + z = 1 \tag{1}$$

ここで、中心点 P が三角形の外側にある場合、例えば、中心点 P が頂点 A を結ぶ直線で辺 BC の外側にある場合には S_1を負にします。このように定義された面積座標は規格化面積座標あるいは絶対面積座標と呼ばれています。しかし、この規格化面積座標では、直線上の 2 つの中心点 $P = (x_P, y_P, z_P)$, $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ から導かれる中心点 $P - Q = (x_P - x_Q, y_P - y_Q, z_P - z_Q)$ は、$x_P - x_Q + y_P - y_Q + z_P - z_Q = 0$ となるので、規格化すると無限大になり、規格化面積座標を求めることができません。P. Yiu の Introduction to the Geometry of the Triangle [3] では、このような中心点について、"**The infinite point** of a line L has **homogeneous coordinates** given by the difference of **the absolute barycentric coordinates** of two distinct points on the line. as such, the coordinate sum of an infinite point is zero. We think of all infinite points constituting the line at infinity, L^∞, which has equation x + y + z = 0." のように紹介されています。ここで、homogeneous coordinates は x + y + z = 1 の条件を付けない面積座標(非規格化面積座標) で the absolute barycentric coordinates は規格化面積座標 のことです。非規格化面積座標は、直線や円、それらの交点を求めるような場合に広く使われています。先の規格化面積座標と区別するために、非規格化面積座標は P = x : y : z あるいは省略して P = x :: のように表記されます。中心点を集めた Prof. Kimberling の Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)[2] では、中心点の座標表示には非規格化面積座標が使われています。

面積座標を扱う場合、前解説でも紹介した Conway 表記 [4] を使うと便利です。Conway 表記 S_A, S_B, S_C は、三角形の３つの辺の長さ a, b, c, それぞれの辺に向かい合う頂角を A, B, C を用いて以下のように定義されます。

$$\begin{aligned}
S_A &= S\cot(A) = (b^2 + c^2 - a^2)/2 = bc\cos(A),\\
S_B &= S\cot(B) = (c^2 + a^2 - b^2)/2 = ca\cos(B),\\
S_C &= S\cot(C) = (a^2 + b^2 - c^2)/2 = ab\cos(C),\\
S &= 2\times(\text{三角形の面積}).
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで、S_A, S_B, S_C の２番目と 3 番目の等号は三角形の余弦定理を表したものです。Conway 表記では、以下のような関係が成り立ちます。

$$S_B + S_C = a^2,\ S_C + S_A = b^2,\ S_A + S_B = c^2,\ S_A + S_B + S_C = (a^2+b^2+c^2)/2,$$

$$S_BS_C + S_CS_A + S_AS_B = S^2. \tag{3}$$

1 行目の関係式は定義から直接導けますが、２行目の関係式は、面積と辺の長さとの関係を表すヘロンの公式から導けます。なお、Conway 表記を使うときには、S は三角形の面積 S_{area} の 2 倍であることに注意してください。
この解説では、その他、a, b, c の対称関数である以下の E, F を使います。

$$E = (S_B+S_C)(S_C+S_A)'S_A+S_B)/S^2,$$
$$F = S_AS_BS_C/S^2. \tag{4}$$

　オイラー座標は、規格化面積座標で表された中心点の座標 P = (x, y, z) を以下の変換式で変換した中心点の座標 P = (x_e, y_e) で定義されます。

$$x_e = S_Ax + S_By + S_Cz$$
$$y_e = S_A(S_B - S_C)x + S_B(S_C - S_A)y + S_C(S_A - S_B)z \tag{5}$$

ここで、$S_Ax + S_By + S_Cz = 0$ は orthic axis と呼ばれる直線です。また、$S_A(S_B - S_C)x+S_B(S_C - S_A)y+S_C(S_A - S_B)z = 0$ はオイラー線です。orthic axis については、あまり知られていないので、英文の論文 1) の 10 章で紹介しています。これら２つの直線は、互いに直交しており、その交点は ETC の記号で中心点 X(468) に相当します。 X(468) は規格化面積座標で以下のように与えられます。

$$X(468) = (-3FS^2+(E+F)S_BS_C,\ -3FS^2+(E+F)S_CS_A,\ -3FS^2+(E+F)S_AS_B)/\{(E-8F)S^2\} \tag{6}$$

X(468) のオイラー座標は (0, 0) でオイラー座標系の原点になります。オイラー座標系で点 (x_e, y_e) は、orthic axis に平行な直線 $S_Ax+ S_By + S_Cz = x_e$ とオイラー線に平行な直線 $S_A(S_B - S_C)x + S_B(S_C - S_A)y+S_C(S_A - S_B)z = ye$ の交点なので、上記の変換式は、規格化面積座標で表した中心点の座標 P = (x, y, z) からオイラー座標で表した中心点 P = (x_e, y_e) への座標変換に相当しています。この変換の逆変換は、

$$x = \{-3FS^2+(E+F)S_BS_C+(S^2-3S_BS_C)x_e+(S_B-S_C)y_e\}/\{(E-8F)S^2\}$$
$$y = \{-3FS^2+(E+F)S_CS_A+(S^2-3S_CS_A)x_e+(S_C-S_A)y_e\}/\{(E-8F)S^2\}$$
$$z = \{-3FS^2+(E+F)S_AS_B+(S^2-3S_AS_B)x_e+(S_A-S_B)y_e\}/\{(E-8F)S^2\} \tag{7}$$

となります。表 1 にいくつかの中心点の非規格化面積座標とそのオイラー座標をまとめま

した。

表１　中心点の面積座標とオイラー座標

X(n)	面積座標 (非規格化)	オイラー座標(x, y)
X(1)　(内心)	a : b : c	(aS_A /a, $aS_A(S_B-S_C)$/a)
X(2)　(重心)	1 : 1 : 1	((E+F)/3, 0)
X(3)　(外心)	$S^2-S_BS_C : S^2-S_CS_A : S^2-S_AS_B$	((E-2F)/2, 0)
X(4)　(垂心)	$S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B$	(3F, 0)
X(5)(9 点中心)	$S^2+S_BS_C : S^2+S_CS_A : S^2+S_AS_B$	((E+F)/4, 0)
X(6)	$S_B+S_C : S_C+S_A : S_A+S_B$	(S^2/(E+F), -$S_A^2(S_B-S_C)$/{2(E+F)})
X(23)	$(E+4F)S^2-4(E+F)S_BS_C$ ::	(-(E+F). 0)
X(468)	$-3FS^2+(E+F)S_BS_C$ ::	(0, 0)

ここで、$ ….. $ は ….. をサイクリックに置き換えて加えたものです。例えば、a=a+b+c, $aS_A(S_B-S_C)$= $aS_A(S_B-S_C)+ bS_B(S_C-S_A)+ cS_C(S_A-S_B)$となります。

1.2 オイラー座標系と通常の直交座標系(Catesian coordinates system)

2 つの中心点を $P = (x_P, y_P, z_P)$ と $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ とすると、中心点間の距離 D は、

$$D^2 = S_A(x_P - x_Q)^2 + S_B(y_P - y_Q)^2 + S_B(z_P - z_Q)^2 \tag{8}$$

で与えられます 3)。オイラー座標系の原点(0, 0) と点(x_e, 0) との距離 d_X は、式 6) と逆変換の式(7) から、

$$\begin{aligned} d_x^2 &= [S_A\{(S^2-3S_BS_C)x_e\}^2+ S_B\{(S^2-3S_CS_A)x_e\}^2+ S_C\{(S^2-3S_AS_B)x_e\}^2]/\{(E-8F)S^2\}^2 \\ &= [(E+F)S^4 - 18FS^4+9FS^4]x_e^2/\{(E-8F)S^2\}^2=(E-8F)S^4x_e^2/\{(E-8F)S^2\}^2 \\ &=x_e^2/(E-8F) \end{aligned} \tag{9}$$

で与えられます。すなわち、

$$x_e = d_x(E-8F)^{1/2} \tag{9'}$$

となります。

同様に、原点(0, 0) と点(0, y_e) の距離 d_y は、

$$d_y^2 = [S_A\{(S_B - S_C)y_e\}^2+ S_B\{(S_C-S_A)y_e\}^2+ S_C\{(S_A-S_B)y_e\}^2]/\{(E-8F)S^2\}^{2y}$$

$= [(E+F)(S_A^2+S_B^2+S_C^2)-(S_A^3+S_B^3+S_C^3)-6FS^2]y_e^2/\{(E-8F)S^2\}^2$
$= [-2(E+F)S^2+3ES^2-6FS^2]y_e^2/\{(E-8F)S^2\}^2=[(E-8F)S^2]y_e^2/\{(E-8F)S^2\}^2$
$$= y_e^2/\{(E-8F)S^2\} \tag{10}$$
から、

$$y_e = d_y(E-8F)^{1/2}S \tag{10'}$$

で与えられます。したがって、式(9') と式(10') から、オイラー座標系は、通常の直交座標系(Cartesian coordinates system) の x 軸と y 軸のスケールをそれぞれ $(E-8F)^{1/2}$, $(E-8F)^{1/2}S$ 倍した直交座標系ということになります。 したがって、例えば、2 つの中心点 $P = (x_P, y_P, z_P)$ と $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ のオイラー座標を $P = (x_{eP}, y_{eP})$ と $Q = (x_{eQ}, y_{eQ})$ とすると、中心点間の距離 D は、以下のように与えられます。

$$D^2 = (x_{eP} - x_{eP})^2/(E-8F) + (y_{eQ} - y_{eQ})^2/\{(E-8F)S^2\}$$
$$= [(x_{eP} - x_{eP})^2S^2 + (y_{eQ} - y_{eQ})^2]/\{(E-8F)S^2\} \tag{11}$$

例えば、通常の直交座標で $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$, $R(x_R, y_R)$ を頂点とする三角形の面積 S_{PQR} は、行列式を用いて、

$$S_{PQR} = (1/2)\ |\ (x_P, y_P, 1) / (x_Q, y_Q, 1,/ (x_R, y_R, 1)\ | \tag{12}$$

で与えられますが、オイラー座標で $P(x_{eP}, y_{eP})$, $Q(x_{eQ}, y_{eQ})$, $R(x_{eR}, y_{eR})$ を頂点とする三角形の面積は、以下のようになります。

$$S_{PQR} = (1/2)\ |\ (x_{eP}, y_{ep}, 1) / (x_{eQ}, y_{eQ}, 1)/ (x_{eR}, y_{eR}, 1)\ |/\{(E-8F)S\} \tag{13}$$

先の変換の式(5) と行列式の性質を使うと、面積座標で $P = (x_P, y_P, z_P)$, $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$, $R = (x_R, y_R, z_R)$ を頂点とする三角形の面積は

$$S_{PQR} = (1/2)S|\ (x_P, y_p, z_P) / (x_Q, y_Q, z_Q) / (x_R, y_R, z_R)\ | \tag{14}$$

となります。例えば、三角形 ABC の面積 S_{area} は、頂点のオイラー座標が $A(S_A, S_A(S_B-S_C))$, $B(S_B, S_B(S_C-S_A))$, $C(S_C, S_C(S_A-S_B))$ なので 、式(13) から

$$S_{area} = (1/2)|\ (S_A, S_A(S_B-S_C), 1) / (S_B, S_B(S_C-S_A), 1) / (S_C, S_C(S_A-S_B), 1)|/\{(E-8F)S\}$$
$$= (1/2)(E-8F)S^2/\{(E-8F)S\} = (1/2)\ S \tag{15}$$

で与えられます。したがって、先に述べたように、Conway 表記の S は、三角形の面積 S_{area} の 2 倍で定義されていたことが分かります。 これらの結果から、3 つの中心点 $P(x_P, y_P)$, $Q(x_Q, y_Q)$, $R(x_R, y_R)$ がひとつの直線上にあるための条件（共線性）は、$S_{PQR} = 0$ から、行列式を用いて、

$$| (x_{eP}, y_{eP}, 1)/ (x_{eQ}, y_{eQ}, 1)/ (x_{Rer}, y_{eR}, 1) |= 0 \tag{16}$$

で与えられます。 また、面積座標における共線性は、$P = (x_P, y_P, z_P)$, $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$, $R = (x_R, y_R, z_R)$ として、以下の行列式

$$| (x_P, y_P, z_P)/(x_Q, y_Q, z_Q)/(x_R, y_R, z_R) |= 0 \tag{17}$$

となります。

1.3 オイラー座標系における中心点のベクトル表示

中心点 $P(x_{eP}, y_{eP})$ は、オイラー座標系における成分(x_{eP}, y_{eP}) をもつ 2 次元ベクトル $\mathbf{P} = (x_{eP}, y_{eP})$ に対応させることができます。この場合、a, b. c の対称関数を $f = f(a,b,c)$, $g = g(a, b, c)$ とするとき、２つのベクトル $\mathbf{P} = (x_{eP}, y_{eP})$ と $\mathbf{Q} = (x_{eQ}, y_{eQ})$ のベクトル和 $f\mathbf{P} + g\mathbf{Q}$ は、ベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ から作られる新しい中心点のベクトルであり、ETC で定義された ”(f, g) Combo of **P** and **Q**” に相当します[2)]。とくに、２つのベクトルの差 $\mathbf{P} – \mathbf{Q}$ は、ベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ から作られた新しい中心点のベクトルに相当して、その中心点は、面積座標で$(x_P – x_Q, y_P – y_Q, z_P – z_Q)$、オイラー座標で$(x_{eP} - x_{eQ}, y_{eP} - y_{eQ})$ で与えられます。このベクトルに対応する中心点は、先に述べた **infinite points** に分類された中心点に相当します。

例えば、オイラー線上の中心点 X(3) と X(4) に相当するベクトル $\mathbf{P} = \mathbf{X}(3) = ((E-2F)/2, 0)$と $\mathbf{Q} = \mathbf{X}(4) = (3F, 0)$ を合成したベクトルは

$$\begin{aligned} \mathbf{P} + \mathbf{Q} &= \mathbf{X}(3) + \mathbf{X}(4) = ((E-2F)/2+3F, 0) = 2\,\mathbf{X}(5) \\ \mathbf{P} – \mathbf{Q} &= \mathbf{X}(3) - \mathbf{X}(4) = ((E-2F)/2-3F, 0) = ((E-8F)/2, 0) = \mathbf{X}(47308) \end{aligned} \tag{18}$$

となります。すなわち、中心点 X(3) と X(4) の間に以下の関係が成り立ちます。

$$\begin{aligned} &2X(5) = X(3) + X(4) \\ &X(47308) = X(3) - X(4) \end{aligned} \tag{19}$$

ここで、初めの関係式は、X(5) が X(3) と X(4) の中点であることを示しているので、非規

格化面積座標で表示される ETC では X(5) として掲載されています。この種のベクトル和から作られる中心点の例は　英文論文[1)] の第 5 章 RECTANGLES に載せています。また、2 番目の関係式は、**infinite points** に相当する新しい中心点で、ETC で Shinagawa-Euler point と命名された中心点のひとつです。

　ベクトル **P** = (x_{eP}, y_{eP}) と **Q** = (x_{eQ}, y_{eQ}) の内積 **P・Q** は、通常の内積と同様に、

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} \quad = (S^2 x_P x_Q + y_P y_Q)/\{(E-8F)S^2\} = |P||Q|\cos(\theta) \qquad (20)$$

により定義することができます。ここで、θ はベクトル **P** と **Q** のなす角、|P|, |Q| はその大きさで以下のように与えられます。

$$|P| = \{S^2 x_P{}^2 + y_P{}^2\}^{1/2}/\{(E-8F)S^2\}^{1/2}$$
$$|Q| = \{S^2 x_Q{}^2 + y_Q{}^2\}^{1/2}/\{(E-8F)S^2\}^{1/2} \qquad (21)$$

ここで、|P|, |Q| は中心点 P(x_P, y_P, z_P), Q(x_Q, y_Q, z_Q) と X(468) との距離に相当します。
同様に、**infinite point** に相当する中心点の大きさは、

$$|\mathbf{P}-\mathbf{Q}| = \{S^2(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2\}^{1/2}/\{(E-8F)^{1/2}S\} \qquad (22)$$

で与えられます。したがって、面積座標における **infinite points** は無限大の中心点ではなく、オイラー座標では、式(22)で与えられる大きさをもつ中心点になります。

　ベクトルの内積の定義から、ベクトル **P** = (x_{eP}, y_{eP}) と **Q** = (x_{eQ}, y_{eQ}) が垂直であるための条件は

$$S^2 x_P x_Q + y_P y_Q = 0 \qquad (23)$$

で与えられます。

２．面積座標における infinite points のオイラー座標

　従来の面積座標では、以下のような中心点

$$P(x_P, y_P, z_P) - Q(x_Q, y_Q, z_Q) \qquad (24)$$

は **infinite points** に分類されましたが、1.3 で述べたように、オイラー座標では、

$$P(x_{eP}, y_{eP}) - Q(x_{eQ}, y_{eQ}) \tag{25}$$

で与えられます。

オイラー線上の **infinite points** は、ETC では X(30), **Euler infinity point** として掲載されています。 表２にオイラー線上の **infinite points** の例とそのオイラー座標をまとめました。

表２　オイラー線上の infinite points とオイラー座標

X(m)–X(n)=X(30)	**オイラー座標 (x, y)**	X(*) in ETC
X(2) - X(3)	(-(E-8F)/6 , 0)	X(47332)
X(2) - X(4)	((E-8F)/3 , 0)	X(47031)#
X(2) - X(5)	((E-8F)/12, 0)	X(18579)#
X(2) - X(23)	(4(E+F)/3 , 0)	X(47311)
X(3) - X(4)	((E-8F)/2, 0)	X(47308)
X(3) - X(5)	((E-8F)/4, 0)	X(47335)
X(3) - X(23)	(3E/2, 0)	未登録#
X(4) - X(5)	(-(E-8F)/4 , 0)	X(47336)
X(4) - X(23)	(E+4F, 0)	X(47339)
X(5) - X(23)	((5E+8F), 0)	X(47341)

これらの **infinite points** のうち、# をつけた中心点を除いたものは、Shinagawa –Euler point と命名された新しい中心点です。

オイラー線上の 2 つの中心点 X(m) と X(n) の距離 D(m, n) は、式(22) から

$$D(m, n) = |\, x_e(m) - x_e(n)|/(E-8F)^{1/2} \tag{26}$$

で与えられるので、オイラー線上の **infinite points** X(m) - X(n) は、X(m) と X(n) の符号つきの距離に相当しています。例えば、X(2) と X(3) の距離は $(E-8F)^{1/2}/6$ となります。

前解説でも述べましたが、表２から中心点の位置関係を調べることができます。まず、$E+F = (a^2+b^2+c^2)/2 > 0$ なので、X(2) > 0, X(23) < 0, X(3) >X(2), X(2) > X(4), X(2) > X(5), X(3) >X(4), X(3) > X(5), X(4) > X(5) となります。したがって、オイラー線上で X(23), X(5), X(4), X(2), X(3) の順に並びます。すなわち、X(23) は重心 X(2) と原点 X(468) の反対側にあり、正の方向に 9 点中心 X(5), 垂心 X(4), 重心 X(2), 外心 X(3)の順に並ぶことになります。

オイラー線以外の直線上の **infinite points** についても同様にオイラー座標で表すことができます。主な直線とその直線上の中心点については、ETC の **Tables** の

中にある“Central Lines” [2] にまとめられていますので、主な直線とその **infinite points** の例およびオイラー座標を表３に示しました。

表3．主な直線上の infinite points の例とそのオイラー座標

Line/Axis	P – Q	$x_e(n)$	$y_e(n)$	X(*) in ETC
Euler	X(2) - X(3)	$-(E-8F)/6$	0	X(47332)
Brocard .	X(3) - X(6)	$\{(E+F)(E-2F)-2S^2\}/\{(E+F)\}$	$\$S_A^2(S_B-S_C)\$/\{(E+F)\}$	X(47468)
OI	X(1) - X(3)	$-\{\$ab\$S^2-3\$abS_AS_B\$\}/\{abc\$a\$\}$	$-\$ab(S_A-S_B)\$S^2/\{abc\$a\$\}$	未登録
IK	X(1) - X(6)	$-\{(E+F)\$a\$-3\$aS_A\$\}/(3\$a\$)$	$\$aS_A(S_B-S_C)\$/\$a\$$	X(47477)
Nagel	X(1) - X(2)	$\{(E+F)^2-3S^2\}/(E+F)$	$3\$S_A^2(S_B-S_C)\$/\{2(E+F)\}$	X(47472)
GK	X(2) - X(6)	$\{(E+4F)\$a\$-4\$aS_A\$\}/(4\$a\$)$	$-\$aS_A(S_B-S_C)\$/\$a\$$	X(47473)
van Aubel	X(4) - X(6)	$\{3(E+F)F-S^2\}/(E+F)$	$\$S_A^2(S_B-S_C)\$/\{2(E+F)\}$	未登録

なお、表３にない **infinite points**、また、表３に載せていない直線上の **infinite points** については、ETC の X(47488) ~ X(47508)に掲載されています。

３．オイラー座標系における直線と円

オイラー座標系の２つの中心点 $P = (x_{eP}, y_{eP})$, $Q = (x_{eQ}, y_{eQ})$ を通る直線は、

$$y = m(x - x_{eP}) + y_{eP},\ m = (y_{eP} - y_{eQ})/(x_{eP} - x_{eQ}) \tag{27}$$

で与えられます。したがって、式'27) は通常の直交座標系と同じ表式なので、傾き m, m' をもつ２つの直線の平行条件は m = m' となります。しかし、傾き m は通常の直交座標系の S 倍になっていますので、直交条件は、通常の直交座標での mm' = - 1 ではなく、オイラー座標系では、$mm' = -S^2$ となります。したがって、例えば、任意の中心点 (x_0, y_0) の式(27) による反転中心の中心点 (x, y) は以下のように与えられます。

$$\begin{aligned} x &= \{-(m^2 - S^2)x_0 + 2my_0 + 2m^2x_{eP} - 2my_{eP}\}/(m^2+S^2) \\ y &= \{2mS^2x_0 + (m^2 - S^2)y_0 - 2mS^2x_{eP} + 2S^2y_{eP}\}/(m^2+S^2) \end{aligned} \tag{28}$$

オイラー座標系では、オイラー線は、$y = 0$, orthic axis は、$x = 0$ となります。その他の直線の例として、ここでは、Brocard axis [2]を取り上げます。この直線は、$X(3) = ((E-2F)/2, 0)$ と $X(6) = (S^2/(E+F), \$S_A^2(S_B-S_C)\$/\{2(E+F)\})$ を通るので、直線の式は

$$y = m\{x - (E-2F)/2\},\ m = \$S_A^2(S_B-S_C)\$/\{(E+F)(E-2F)-2S^2\} \tag{29}$$

で与えられます。例えば、Brocard axis と orthic axis ($x = 0$) との交点 (x, y) は、

$$(0, -(E-2F)\$S_A^2(S_B-S_C)\$/\{(E+F)(E-2F)-2S^2\}/[2\{(E+F)(E-2F)-2S^2\}]) \tag{30}$$

となります。

つぎに、オイラー座標系での円の方程式は、２つの中心点 $P = (x_{eP}, y_{eP})$ と $Q = (x_{eQ}, y_{eQ})$ の距離 D が式(11) で与えられるので、中心を (x_0, y_0)、半径を r とすると、以下のように与えられます。

$$(x - x_0)^2S^2 + (y - y_0)^2 = \{(E-8F)S^2\}\, r^2 \tag{31}$$

例えば、外心円は、中心が $X(3) = ((E-2F)/2, 0)$ で半径が R なので、

$$\{x - (E-2F)/2)\}^2S^2 + y^2 = (E-8F)R^2S^2 \tag{32}$$

となります。式(32) が外心円を表していることは、外心円が頂点 A, B, C を通る円なので、例えば、頂点 $A = (S_A, S_A(S_B-S_C))$ が式(32) を満たすことから確認できます。なお、英文論文 [1] の Table 3 には、他の円の例を載せています。

外心円と先の Brocard axis との交点(x, y) は、

$$((E-2F)/2 \pm (E-8F)^{1/2}S\, R/(m^2+S^2)^{1/2}, \pm (E-8F)^{1/2}m\, S/(m^2+S^2)^{1/2}) \tag{33}$$

で与えられます。これらの中心点は ETC の X(1379), X(1380)に掲載されています。

おわりに

ここでは、オイラー線を x 軸、それに直交する orthic axis を y 軸、これら二つの直線の交点、ETC の記号で X(468)、を原点とするオイラー座標系を紹介しました。この座標系は、従来の直交座標系(Cartesian coordinates system) の x 標のスケールを$(E-8F)^{1/2}$倍、y 標のスケールを$(E-8F)^{1/2}S$ 倍した直交座標系で、面積座標で表された三角形の中心点 P = (x, y, z）は、変換式によってオイラー座標系の中心点 P(xe_P, ye_P）に変換されます。オイラー座標系を用いることによって、従来の面積座標では扱えなかった **infinite points** に分類された中心点も通常の中心点と同様に扱えることを示しました。さらに、オイラー座標系における直線や円の表式、それらの交点を Brocard axis と外心円を例にして紹介しました。

最後に、三角形の幾何学に関して有益なご議論をいただき、また、今回の英文論文の執筆に関してご指導いただいた米国 Evansville 大学の Kimberling 教授に感謝申し上げます。

参考文献

1） K. Shinagawa, C. Kimberling, and Peter J.C. Moses : Euler Coordinates in the Plane of a Triangle, International Journal of Computer Discovered Mathematics, **7** (2022) 297~318.

2） C. Kimberling : Encyclopedia of Triangle Centers (ETC), https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

3） P. Yiu : Introduction to the Geometry of the Triangle, 2001, revised 2013, http://math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry130411.pdf.

4） Conway : Triangle Notation (Wikipedia), https://en.wikipedia.org/wiki/Conway_triangle_notation/.