正四面体　　2012.7 Yuji Kobayashi

(a) 一辺の長さ１の正四面体 ABCD を考える。三角形 BCD の重心を O とすると、$\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{3}/3$ なので、正四面体の高さ $\overline{\mathrm{OA}}$ は

$$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{1^2 - \left(\sqrt{3}/3\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{1}$$

体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \fallingdotseq 0.117851. \tag{2}$$

今、半径 r の一本のポール（円柱）が、この四面体を頂点 A から下面 BCD に垂直に貫ているとし、ポールが四面体をくり抜いている部分（両者の共通部分）を K とする。線分 AO 上の点を P とし AP の長さを z とする。点 P を含む水平な面が、AB, AC, AD と交わる点をそれぞれ B′, C′, D′ とすると、B′C′D′ は１辺の長さが $\sqrt{\frac{3}{2}}z$ の正三角形をなす（図１）。正４面体 AB′C′D′ は、$\sqrt{\frac{3}{2}}z < \sqrt{3}r$ のとき、すなわち、$z < \sqrt{2}r$ のときポールの内部に含まれ、$z > 2\sqrt{2}r$ のときポールの（A から測り）$2\sqrt{2}r$ から z までの間を含むようになる（題意より、$r \ll 1$ とする)。よって、

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \tag{3}$$

と分解される。ただし、K_1 は A を頂点とする１辺の長さ $\sqrt{3}r$ の正四面体、K_2 は高さ $\sqrt{2}r$ のポールと、一辺の長さ $2\sqrt{3}r$ の正四面体の高さ $\sqrt{2}r$ までの部分との共通部分、K_3 は長さ

$$\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{3}r\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{2}r \tag{4}$$

のポールである。K_1, K_3 の体積 $|K_1|, |K_3|$ は、

$$|K_1| = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot (\sqrt{3}r)^3 = \frac{\sqrt{6}}{4}r^3. \tag{5}$$

$$|K_3| = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{2}r\right) \cdot \pi r^2. \tag{6}$$

(b) 次に、K_2 の体積を求める。$\sqrt{2}r \le z \le 2\sqrt{2}r$ のとき、P を含む水平な面上で、ポールの周囲（P を中心とする半径 r の円）と、線分 B′C′ との交点を、順に、$\mathrm{B}_2, \mathrm{C}_1$、C′D′ との交点を $\mathrm{C}_2, \mathrm{D}_1$、D′B′ との交点を $\mathrm{D}_2, \mathrm{B}_1$ とする。$\mathcal{K} = \mathrm{B}_1\frown\mathrm{B}_2\mathrm{C}_1\frown\mathrm{C}_2\mathrm{D}_1\frown\mathrm{D}_2\mathrm{B}_1$ が、 K_2 のこの平面によるが切口である（図２）。M を B′C′ の中点とし、$t = \frac{1}{2}\angle \mathrm{B}_2\mathrm{PM}$ とおくと、$\overline{\mathrm{PM}} = \overline{\mathrm{B'M}}/\sqrt{3} = z/2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{PB}_2} = r$ なので、

$$\cos t = \frac{z}{2\sqrt{2}r}. \tag{7}$$

ここで、

$$|\triangle \mathrm{B}_2\mathrm{PM}| = \frac{r^2 \sin t \cos t}{2}, \tag{8}$$

$$|\,扇\ \mathrm{B_1}\widehat{\ }\mathrm{B_2P}\,| = \frac{1}{3}\cdot\frac{2\pi-6t}{2\pi}\cdot\pi r^2 \tag{9}$$

ゆえ、

$$|\mathcal{K}| = 3r^2\sin t\cos t + r^2(\pi - 3t). \tag{10}$$

また、(7) から、

$$dz = -2\sqrt{2}r\sin t\,dt. \tag{11}$$

よって、

$$\begin{aligned} |K_2| &= r^2\int_{\sqrt{2}r}^{2\sqrt{2}r}\Big(3\sin t\cos t + \pi - 3t\Big)\,dz \\ &= 2\sqrt{2}r^3\int_0^{\pi/3}\Big(3\sin^2 t\cos t + \pi\sin t - 3t\sin t\Big)\,dt \\ &= 2\sqrt{2}r^3\Big[\sin^3 t - \pi\cos t + 3t\cos t - 3\sin t\Big]_0^{\pi/3} \\ &= 2\sqrt{2}\Big(\pi - \tfrac{9\sqrt{3}}{8}\Big)r^3, \end{aligned} \tag{12}$$

となり、(5), (6), (12) より、

$$\begin{aligned} |K| &= |K_1| + |K_2| + |K_3| \\ &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\pi r^2 - 2\sqrt{6}r^3 \fallingdotseq (2.5651 - 4.89898\,r)r^2. \end{aligned} \tag{13}$$

(c) 次に、四面体 ABCD の重心を G とする（図 3）。$\overline{\mathrm{GA}} = \overline{\mathrm{GB}}, \overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{2/3}, \overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{3}/3$ なので、

$$\sqrt{(\sqrt{3}/3)^2 + \overline{\mathrm{OG}}^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} - \overline{\mathrm{OG}} \tag{14}$$

より、 $\overline{\mathrm{OG}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}, \overline{\mathrm{GA}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$　ここで、$s = \angle\mathrm{OGB}$ とおけば、

$$\cos s = \frac{1}{3},\ \sin s = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \tag{15}$$

今、頂点 B から、平面 ACD に垂直に別のポールが貫いているとする。CD の中点を E とすれば、△ ABE の乗る平面 $\mathcal{P}$ が２本のポールの中心線を含む平面である（図３）。適当に座標変換をすれば $\mathcal{P}$ が G を原点とする xy-平面であり、２本の中心線は原点 G で交わるとしてよい。２本のポールは角度 s で交差するが、その共通部分を H とする。点 $\mathrm{Q}(0,0,z)$ を通る水平な平面（$\mathcal{P}$ と平行な高さ z の平面）$\mathcal{P}_z$ による H の切り口は、１つの頂角が s の菱形 $\mathcal{H} = \mathrm{STUV}$ である（$\angle STU = s$ とする、図４）。SV の中点を M、Q から SV に下ろした垂線の足を N とする。$v = \angle GNQ$ とおくと、$\overline{GN} = r, \angle QMN = s$ なので、

$$\sin v = \frac{z}{r},\ \overline{\mathrm{QN}} = r\cos v,\ \overline{\mathrm{QM}} = \frac{\overline{\mathrm{QN}}}{\sin s} = \frac{3r\cos v}{2\sqrt{2}}. \tag{16}$$

したがって、

$$|\mathcal{H}| = 4\,\overline{\mathrm{QM}}\cdot\overline{\mathrm{QN}} = 3\sqrt{2}\,r^2\cos^2 v. \tag{17}$$

(16) より、

$$dz = r\cos v\, dv \tag{18}$$

ゆえ、

$$\begin{aligned} |H| &= 2\int_0^r 3\sqrt{2}\, r^2\cos^2 v\, dz \\ &= 6\sqrt{2}\, r^3\int_0^{\pi/2}\cos^3 v\, dv \\ &= 6\sqrt{2}\, r^3\Big[\tfrac{3}{4}\sin v + \tfrac{1}{12}\sin 3v\Big]_0^{\pi/2} \\ &= 4\sqrt{2}\, r^3 \fallingdotseq 5.65685\, r^3. \end{aligned} \tag{19}$$

(d) さらに、３本目のポールが、四面体の頂点 C から平面 ABD に垂直に貫いているとする。このポールの中心線 CG の (c) の平面 $\mathcal{P}$ への射影は EG である（図３)。$u = \angle\mathrm{CGE}$ とおけば、$\overline{GC} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \overline{CE} = \frac{1}{2}$ ゆえ、

$$\sin u = \frac{\sqrt{6}}{3}. \tag{20}$$

(c) において、さらに GE が x-軸になるように座標変換すれば、３本目のポールの平面 $\mathcal{P}_z$ での切り口は、中心 $(z/\tan u, 0, z) = (\frac{\sqrt{2}}{2}r\sin v, 0, r\sin v)$、短径 $2r$、長径 $2r/\sin u = \sqrt{6}r$ の楕円である（図５)。

$$\frac{\overline{\mathrm{QN}}}{\overline{\mathrm{QS}}} = \sin\frac{\pi - s}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{\overline{\mathrm{QN}}}{\overline{\mathrm{QV}}} = \sin\frac{s}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{21}$$

なので、

$$\overline{\mathrm{QU}} = \overline{\mathrm{QS}} = \frac{\sqrt{6}}{2}r\cos v,\ \overline{\mathrm{QV}} = \sqrt{3}r\cos v. \tag{22}$$

平面 $\mathcal{P}_z$ の x-成分に $\sqrt{6}/3$ を掛け、図形を左右に縮小すると STUV は $\overline{\mathrm{QU}'} = \frac{\sqrt{6}}{3}\overline{QU} = r\cos v$ の菱形 S′TU′V に（したがて、△S′U′V は正三角形である）なり、楕円は中心 O′$(\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin v, 0, r\sin v)$、半径 r の円になる（図６)。この円上の点 R$(r\cos w + \frac{\sqrt{3}}{3}r\sin v, r\sin w, r\sin v)$ $(0 \leq w < \pi)$ が、線分 S′V 上にあるためには

$$r\sin w = \sqrt{3}\big(r\cos w + \frac{\sqrt{3}}{3}r\sin v + r\cos v\big) \tag{23}$$

すなわち、

$$\sin w - \sqrt{3}\cos w = \sin v + \sqrt{3}\cos v, \tag{24}$$

または、

$$\sin(w - \pi/3) = \sin(v + \pi/3). \tag{25}$$

$v \leq \pi/3$ のとき、適する w は、

$$w_1 = v + \frac{2\pi}{3},\ w_2 = \pi - v \tag{26}$$

であり、$v > \pi/3$ のとき、適する解はない。また、R が線分 UV 上にあるためには、

$$r\sin w = -\sqrt{3}\big(r\cos w + \frac{\sqrt{3}}{3} r\sin v - r\cos v\big) \tag{27}$$

より

$$\sin(w + \frac{\pi}{3}) = \sin(v + \frac{2\pi}{3}) \tag{28}$$

で、$0 \leq v \leq \pi/3$ のときに、唯一の解

$$w_3 = v + \frac{\pi}{3} \tag{29}$$

をもつ。

(d) この段落では、O$'$ が平面 $\mathcal{P}_z$ の原点になるように平行移動した xy-座標で考える。菱形 S$'$TU$'$V と円のの共通部分の上半分を $\mathcal{F}$ とする。$\pi/3 < v < \pi/2$ のとき、菱形は円に含まれるので。$\mathcal{F}$ は $\triangle$S$'$U$'$V である。 $0 \leq v \leq \pi/3$ のとき、線分 S$'$V と円との交点を（V に近い方から）X, Y、線分 U$'$V と円との交点を Z とする。Z の xy 座標は $(r\cos w_3, r\sin w_3)$、X, Y の座標は、$0 \leq v \leq \pi/6$ のとき、それぞれ、$(r\cos w_1, r\sin w_1)$, $(r\cos w_2, r\sin w_2)$、$\pi/6 \leq v \leq \pi/3$ のとき、$(r\cos w_2, r\sin w_2)$, $(r\cos w_1, r\sin w_1)$ である。さらに、円と線分 S$'$U$'$ との交点を S$''$ とすると、$\mathcal{F} = \mathrm{S''U'}\widehat{\mathrm{ZX}}\widehat{\mathrm{YS''}}$ となる（図６）。よって、$\pi/3 < v < \pi/2$ のとき、

$$|\,\mathcal{F}\,| = \sqrt{3} r^2 \cos^2 v, \tag{30}$$

$0 \leq v \leq \pi/6$ のとき、

$$\begin{aligned} |\,\mathcal{F}\,| &= \frac{r^2}{2}\sin w_3 \cdot (\cos v - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin v) + \frac{w_1 - w_3}{2} r^2 + \frac{r^2}{2}\sin(w_2 - w_1) + \frac{\pi - w_2}{2} r^2 \\ &= \frac{r^2}{6}\sin(v + \frac{\pi}{3})(3\cos v - \sqrt{3}\sin v) \\ &\quad + \frac{r^2}{2}\Big((v + \frac{2\pi}{3}) - (v + \frac{\pi}{3}) + \sin\big((\pi - v) - (v + 2/3\pi)\big) + \pi - (\pi - v)\Big) \\ &= \frac{r^2}{6}\sin(v + \frac{\pi}{3})(3\cos v - \sqrt{3}\sin v) + \frac{r^2}{2}\big(\frac{\pi}{3} + v + \cos(\pi/6 + 2v)\big) \end{aligned} \tag{31}$$

$\pi/6 \leq v \leq \pi/3$ のとき、

$$\begin{aligned} |\,\mathcal{F}\,| &= \frac{r^2}{6}\sin w_3 \cdot (\cos v - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin v) + \frac{w_2 - w_3}{2} r^2 + \frac{r^2}{2}\sin(w_1 - w_2) + \frac{\pi - w_1}{2} r^2 \\ &= \frac{r^2}{6}\sin(v + \frac{\pi}{3})(3\cos v - \sqrt{3}\sin v) + \frac{r^2}{2}\big(\pi - 3v - \cos(\pi/6 + 2v)\big) \end{aligned} \tag{32}$$

したがって、３本のポールの共通部分 F の体積は、$\sqrt{6}/3$ 掛け縮小したのを元に戻し、

$$|F| = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \int_0^r |\mathcal{F}|\, dz = 2\sqrt{6}\, r \int_0^{\pi/2} |\mathcal{F}| \cdot \cos v\, dv \tag{33}$$

$$
\begin{aligned}
&= 6\sqrt{2}\,r^3\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^3 v\,dv \\
&\quad +\tfrac{\sqrt{6}}{3}\,r^3\int_0^{\pi/3}\sin(v+\tfrac{\pi}{3})(3\cos v-\sqrt{3}\sin v)\cos v\,dv \\
&\quad +\sqrt{6}\,r^3\int_0^{\pi/6}\big(\tfrac{\pi}{3}+v+\cos(\tfrac{\pi}{6}+2v)\big)\cos v\,dv \\
&\quad +\sqrt{6}\,r^3\int_{\pi/6}^{\pi/3}\big(\pi-3v-\cos(\tfrac{\pi}{6}+2v)\big)\cos v\,dv \\
&= 6\sqrt{2}(\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8})r^3+\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{3}{2}r^3 \\
&\quad +\frac{\sqrt{6}}{12}\big(-16+10\sqrt{3}+3\pi\big)r^3+\frac{\sqrt{6}}{12}\big(-23+22\sqrt{3}-3\pi\big)r^3 \\
&= (12\sqrt{2}-5\sqrt{6})r^3 \fallingdotseq 4.72311\,r^3.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

(e) 最後の４本目のポールが D から △ ABC に垂直に貫いているとすると、中心線 DG の (c) の平面 $\mathcal{P}$ への射影は同様に EG である。このポールの平面 $\mathcal{P}_z$ での切り口は、中心 $(-z/\tan u, 0, z) = (\frac{\sqrt{2}}{2}r\sin v, 0, r\sin v)$ の楕円であるが、(d) と同様、x-成分に $\sqrt{6}/3$ を掛け左右に縮小すると、中心 $\mathrm{O}''(-\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin v, 0, r\sin v)$、半径 r の円になる。円 O″ と (d) の $\mathcal{F}$ との共通部分 (すなわち、$\triangle\mathrm{S'U'V}$ と２円の共通部分）を $\mathcal{J}$ とする。$\pi/3 < v < \pi/2$ のとき、菱形は両円に含まれるので。$\mathcal{J}$ は $\triangle\mathrm{S'U'V}$ である。 $0 \le v \le \pi/3$ のとき、円 O″ と線分 U′V との交点を V に近い方から） X′, Y′ 、線分 S′U′ との交点を U″ とする。さらに、２円の上部の交点を V′ とすれば、V′ は QV（y-軸）上にあり、X と X′、および Y と Y′ は y-軸に対して対称の点であり、$\mathcal{J} = \mathrm{S''U''\overset{\frown}{Y'X'}\overset{\frown}{V'}\overset{\frown}{XY}\overset{\frown}{S''}}$ となる（図７）。よって、$\pi/3 < v < \pi/2$ のとき、

$$
|\,\mathcal{J}\,| = \sqrt{3}r^2\cos^2 v, \tag{35}
$$

$0 \le v \le \pi/3$ のときは、

$$
\begin{gathered}
\mathcal{J} = \mathrm{O'V'\overset{\frown}{XY}\overset{\frown}{S''}O'} \;\cup\; \mathrm{O''U''\overset{\frown}{Y'X'}\overset{\frown}{V'}O''}, \\
\mathrm{O'V'\overset{\frown}{XY}\overset{\frown}{S''}O'} \;\cap\; \mathrm{O''U''\overset{\frown}{Y'X'}\overset{\frown}{V'}O''} = \triangle\mathrm{O'V'O''}.
\end{gathered}
\tag{36}
$$

である。$\overline{\mathrm{O'O''}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r\sin v$, $\overline{\mathrm{QV'}} = \sqrt{1-\big(\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin v\big)^2}$ ゆえ、

$$
|\,\triangle\,\mathrm{O'V'O''}\,| = \frac{r^2}{3}\sin v\sqrt{3-\sin^2 v}. \tag{37}
$$

$\alpha = \angle\mathrm{S'O'V'}$ とおくと、

$$
\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin v. \tag{38}
$$

ここで、$0 \ge v \ge \pi/6$ のとき、

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{O'V'\overset{\frown}{XY}\overset{\frown}{S''}O'}\,| &= |\mathrm{O''U''\overset{\frown}{Y'X'}\overset{\frown}{V'}O''}\,| \\
&= \tfrac{r^2}{2}\big(w_1-(\pi-\alpha)+\sin(w_2-w_1)+\pi-w_2\big) \\
&= \frac{r^2}{2}\big(\alpha-\frac{\pi}{3}+2v+\cos(\frac{\pi}{6}+2v)\big).
\end{aligned}
\tag{39}
$$

$\pi/6 \ge v \ge \pi/3$ のとき、(39) は

$$
\frac{r^2}{2}\big(w_2-(\pi-\alpha)+\sin(w_1-w_2)+\pi-w_1\big) = \frac{r^2}{2}\big(\alpha+\frac{\pi}{3}-2v-\cos(\frac{\pi}{6}+2v)\big) \tag{40}
$$

となる。よって４本のポールの共通部分 J の体積は、縮小した分を戻し、

$$\begin{aligned}
|J| &= 4\cdot\tfrac{3}{\sqrt{6}}\cdot\textstyle\int_0^r|\mathcal{J}|\,dz = 2\sqrt{6}r\int_0^{\pi/2}|\mathcal{J}|\cos v\,dv \\
&= 6\sqrt{2}r^3\textstyle\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos^3 v dv - \frac{2\sqrt{6}}{3}r^3\int_0^{\pi/3}\cos v\sin v\sqrt{3-\sin^2 v}\,dv \\
&\quad +2\sqrt{6}r^3\textstyle\int_0^{\pi/6}\big(\alpha-\frac{\pi}{3}+2v+\cos(\frac{\pi}{6}+2v)\big)\cos v\,dv \\
&\quad +2\sqrt{6}r^3\textstyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\big(\alpha+\frac{\pi}{3}-2v-\cos(\frac{\pi}{6}+2v)\big)\cos v\,dv.
\end{aligned} \tag{41}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^{\pi/3}\alpha\cos v\,dv &= \textstyle\int_0^{\pi/3}\cos^{-1}\big(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin v\big)\cos v\,dv \\
&= \big[\cos^{-1}\big(\tfrac{\sin v}{\sqrt{3}}\big)\sin v-\sqrt{3-\sin^2 v}\big]_0^{\pi/3} \\
&= \sqrt{3}+\tfrac{1}{6}(-9+\sqrt{3}\pi)
\end{aligned} \tag{42}$$

なので、

$$\begin{aligned}
|J| &= 6\sqrt{2}r^3\big(\tfrac{2}{3}-\tfrac{3\sqrt{3}}{8}\big)-2\tfrac{\sqrt{6}}{3}r^3(-\tfrac{9}{8}+\sqrt{3}) \\
&\quad +2\sqrt{6}r^3\Big(-\tfrac{7}{3}+\tfrac{4}{\sqrt{3}}+\tfrac{1}{12}(-17+16\sqrt{3}-2\sqrt{3}\pi)+\sqrt{3}+\tfrac{1}{6}(-9+\sqrt{3}\pi)\Big) \\
&= -12\sqrt{2}(-2+\sqrt{3})r^3 \fallingdotseq 4.54725\,r^3.
\end{aligned} \tag{43}$$

(f) ４本のポールが四面体をくり抜く部分の体積 V は、包除原理により,

$$V = 4|K|-6|H|+4|F|-|J|. \tag{44}$$

よって、(13), (19), (34), (43) より、

$$\begin{aligned}
V &= 4\Big(\sqrt{\frac{2}{3}}\pi r^2-2\sqrt{6}r^3\Big)-6(4\sqrt{2}\,r^3)+4(12\sqrt{2}-5\sqrt{6})r^3+12\sqrt{2}(-2+\sqrt{3})r^3 \\
&= 4\sqrt{\frac{2}{3}}\pi r^2-16\sqrt{6}r^3 \fallingdotseq 10.2604\,r^2-39.1918\,r^3.
\end{aligned} \tag{45}$$

例えば、$r=0.1$ のとき、$V\fallingdotseq 0.0634122$ である。

さらに、１辺の長さ a の４面体に、半径 r の４本のポールがくり抜く部分の体積 $V(a,r)$ は、

$$\begin{aligned}
V(a,r) &= a^3V(1,r/a) = 4a^3\big(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\pi(r/a)^2-16\sqrt{6}(r/a)^3\big) \\
&= 4\sqrt{\tfrac{2}{3}}\pi ar^2-16\sqrt{6}r^3 \\
&= \frac{\sqrt{6}}{3}(\pi a-6R)R^2 \quad (R=2r).
\end{aligned} \tag{46}$$